№1

$$f_n(x,n) := \frac{(n+x)^2}{x^2+n^2-n\cdot x} \qquad E_1 = (0,2) \qquad E_2 = (2,\infty)$$

$$\frac{(n+x)^2}{x^2+n^2-n\cdot x} = \frac{(n+x)^2}{(n+x)^2-3\cdot n\cdot x} = \frac{(n+x)^2-3\cdot n\cdot x}{(n+x)^2-3\cdot n\cdot x} + \frac{3\cdot n\cdot x}{(n+x)^2-3\cdot n\cdot x} = 1 + \frac{3\cdot n\cdot x}{(n+x)^2-3\cdot n\cdot x}$$

На обоих множествах последовательность ограничена

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x,n) = \lim_{n\to\infty}\left[\left[1+\frac{3\cdot n\cdot x}{(n+x)^2-3\cdot n\cdot x}\right]\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\left[1+\frac{3\cdot x}{n\cdot\left(1+\frac{x}{n}\right)^2-3\cdot x}\right] = 1+0 = 1\right]$$

Последовательность равномерно сходится на обоих множествах

№2 $$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n}{n^2+4}\cdot\left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^n\right]$$

При $\left|\frac{x+2}{2x+1}\right| < 1$

ряд сходится абсолютно, т.к. по признаку сходимости Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right] = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n^2+4}\cdot\frac{(n+1)^2+4}{n+1}\cdot\frac{x+2}{2x+1}\right| = \left|\frac{x+2}{2x+1}\right|\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\left|\frac{n}{n^2+4}\cdot\frac{(n+1)^2+4}{n+1}\right| < 1\right]$$

ряд сходится

Находим

$$\frac{x+2}{2x+1} = 1 \qquad x+2 = 2x+1 \qquad x_1 = 1 \qquad\qquad \frac{x+2}{2x+1} = -1 \qquad x+2 = -2x-1 \qquad x_2 = -1$$

При $x < -1$ и $x > 1$ ряд сходится абсолютно

В этих точках

$x = 1$ $\quad \frac{x+2}{2x+1} = 1$ $\quad$ Ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+4}$ эквивалентен $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

расходится по признаку сравнения

$x = -1$ $\quad \frac{x+2}{2x+1} = -1$ $\quad$ Ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n}{n^2+4}\cdot(-1)^n\right]$ эквивалентен $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}\cdot(-1)^n\right]$

Знакопеременный ряд сходится по признаку Лейбница, т.к.

$\lim_{n\to\infty}\left(|a_n| = 0\right)$ и $|a_{n+1}| < |a_n|$ для любого n

Интервал сходимости $x \le -1$ и $x > 1$

№3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(2\cdot n\cdot x)}{\sqrt[3]{n^4\cdot x^2}}$ $\quad -\infty < x < \infty$

на всем множесткве $\quad \left|\sin^2(2\cdot n\cdot x)\right| \le 1$

$$|a_n| = \frac{\sin^2(2\cdot n\cdot x)}{\sqrt[3]{n^4\cdot x^2}} < \frac{1}{\sqrt[3]{n^4\cdot x^2}} = \frac{1}{n\cdot\sqrt[3]{n\cdot x^2}}$$

ряд будет сходиться абсолютно по признаку сравнения, т.к. показатель степени при n больше единицы.

№4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2\cdot x}\right)$ $\quad E_1 = (0,1) \quad E_2 = (1,2)$

При n --> ∞ $\quad \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n^2\cdot x}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2\cdot x}\right)$

Т.е. ряд сходится или расходится одновременно с рядом $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\cdot x} = \frac{1}{x}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

А этот ряд сходится абсолютно по признаку сравнения

Для любого $x > 0$ данное условие выполняется, т.е. ряд будет сходиться на указанных множествах.

№8

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n+1)\cdot x^n}$ $\quad$ замена $\quad t = \frac{5}{x}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n+1} = \frac{1}{t}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{t}\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^n}{n} = \frac{1}{t}\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n} - t\right) = \frac{1}{t}\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}\right) - 1$$

Используем разложение $\quad -\ln(1-t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}$

Тогда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(n+1)\cdot x^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n+1} = \frac{1}{t}\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}\right) - 1 = -1 - \frac{x}{5}\cdot\ln\left(1-\frac{5}{x}\right)$

№10 $\displaystyle\int_0^1 \sqrt[3]{x}\cdot\cos(x)\,dx$ $\quad \varepsilon := 0.001$

Использую разложение для $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{4!}\cdot x^4 - \frac{1}{6!}\cdot x^6 + \frac{1}{8!}\cdot x^8 + ...$

тогда $\sqrt[3]{x}\cdot\cos(x) = \sqrt[3]{x} - \frac{1}{2}\cdot\left(x^2\cdot\sqrt[3]{x}\right) + \frac{1}{4!}\cdot\left(x^4\cdot\sqrt[3]{x}\right) - \frac{1}{6!}\cdot\left(x^6\cdot\sqrt[3]{x}\right) + \frac{1}{8!}\cdot\left(x^8\cdot\sqrt[3]{x}\right) + ...$

Почленно интегрирую данный сходящийся знакопеременный ряд с точностью до 0,0001 пока не получим 0,0000

$$\int_0^1 \sqrt[3]{x}\,dx = \frac{3}{4}\cdot x^{\frac{4}{3}}\cdot\Big|_0^1 = 0.7498$$

$$\int_0^1 \frac{-1}{2}\cdot\left(x^2\cdot\sqrt[3]{x}\right)dx = \frac{-3}{20}\cdot x^{\frac{10}{3}}\cdot\Big|_0^1 = -0.1500$$

$$\int_0^1 \frac{1}{4!}\cdot\left(x^4\cdot\sqrt[3]{x}\right)dx = \frac{1}{128}\cdot x^{\frac{16}{3}}\cdot\Big|_0^1 = 0.0078$$

$$\int_0^1 \frac{-1}{6!}\cdot\left(x^6\cdot\sqrt[3]{x}\right)dx = \frac{-1}{5280}\cdot x^{\frac{22}{3}}\cdot\Big|_0^1 = -0.0002$$

$$\int_0^1 \frac{1}{8!}\cdot\left(x^8\cdot\sqrt[3]{x}\right)dx = \frac{1}{376320}\cdot x^{\frac{28}{3}}\cdot\Big|_0^1 = 0.0000$$

- достаточно. получили последнее значение, остальные тоже будут за пределами точности.

$$\int_0^1 \sqrt[3]{x}\cdot\cos(x)\,dx = 0.7498 - 0.1500 + 0.0078 - 0.0002 = 0.6074 = 0.607$$