Задание 1

Производственные функции

1.1. Дайте понятие производственной функции и изокванты. Что означает взаимозаменяемость ресурсов?

Пусть для производства некоторого продукта в количестве **у** единиц используются различные ресурсы: x_1, x_2, …, x_n, выраженные в соответствующих им единицах. Если понята закономерность получения продукта у из ресурсов $\vec{x}$ = (x_1, x_2, …, x_n), т.е. если в явном виде выражена зависимость у = f($\vec{x}$), то такая функция f($\vec{x}$) называется *производственной*.

Пусть зафиксировано некоторое число y_0. Множество в n - мерном пространстве, определяемое равенством

$$Q_{y_0} = \{\vec{x}: f(\vec{x}) = y_0\},$$

называется *изоквантой* функции f($\vec{x}$) уровня y_0.

Из самого определения изокванты следует, что если $\vec{x} \in Q_{y_0}$, $\vec{x^*} \in Q_{y_0}$, то ресурсы $\vec{x}$ и $\vec{x^*}$ обеспечивают производство одного и того же количества продукта y_0, т.е. являются в этом смысле *взаимозаменяемыми*. Для организаторов производства знание изокванты позволяет недостаток одних ресурсов компенсировать увеличением других.

1.2. Производственная функция для райпо имеет вид

$$f(x_1,x_2)= 10\sqrt{x_1} \times \sqrt{x_2},$$

где f – товарооборот, млн. руб.; x_1 – производственная площадь, тыс.кв.м; x_2 – численность работников, сотни чел. Рассмотрите изокванту уровня $y_0 = \sqrt{100 + \delta}$ и найдите на ней точку с координатами C_1 с координатами $\overline{x_1}$, $\overline{x_2}$, где $\overline{x_1} = \frac{(\delta-100)}{100}$, и точку C_2 с координатами x_1^*,

x_2^*, где $x_2^* = \frac{(\delta - 300)}{100}$. Сделайте вывод о возможности замены ресурсов ($\overline{x_1}$, $\overline{x_2}$) и (x_1^*, x_2^*). Полученные результаты изобразите графически.

Решение:

Число δ=502. Тогда уравнение изокванты

$$10\sqrt{x_1} \times \sqrt{x_2} = \sqrt{100 + 502} = \sqrt{602}\,.$$

Возводя обе части в квадрат и деля их на 100, получим:

$$x_1 \times x_2 = 6{,}02.$$

Найдем координаты точки C_1. Так как $\overline{x_1} = \frac{(502-100)}{100} = 4{,}02$, то из уравнения изокванты находим $\overline{x_2} = \frac{6{,}02}{4{,}02} = 1{,}49$. Аналогично находим координаты точки C_2. Так как $x_2^* = \frac{(502-300)}{100} = 2{,}02$, то $x_1^* = \frac{6{,}02}{2{,}02} = 2{,}98$.

Итак, 149 работников в райпо, используя 4,02 тыс. кв. метров производственной площади, обеспечат товарооборот $\sqrt{602} \approx 24{,}536$ (млн. руб.), и такой же товарооборот могут обеспечить 202 работника, используя площадь 2,98 тыс. кв. метров. (рис. 1)

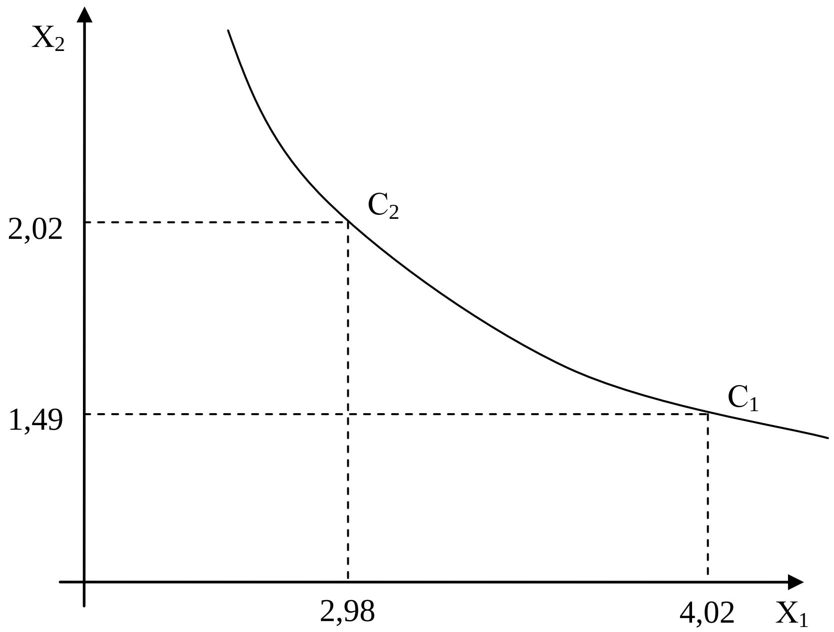


Рис.1

Задание 2

Функция покупательского спроса

2.1. Дайте понятие малоэластичных, среднеэластичных и высокоэластичных товаров. Какие товары называются взаимозаменяемыми?

Обозначим $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ – спрос на товары, выраженный в некоторых единицах, и $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ – цены на эти товары, т.е. p_i – цена на i-й товар; y_i – спрос на i-й товар. Пусть рассматривается некоторый потребитель, например типичный представитель определенной социальной группы, и если для него удается $\vec{y}$ выразить через $\vec{p}$, т.е.

$$\vec{y} = \vec{f}(\vec{p}),$$

то $\vec{f}$ называется функцией спроса.

Определим эластичность ε_{ij} формулой

$$\varepsilon_{ij} = \frac{p_j}{f_i(\vec{p})} \times \frac{\partial f_i(\vec{p})}{\partial p_j}.$$

Величина ε_{ij} является математической идеализацией процентного изменения спроса на i-й товар при увеличении на 1% цены на j-й товар.

Эластичность ε_{ij} при $i = j$ называется прямой, и она показывает, на сколько процентов изменится спрос на i-й товар при увеличении на 1% цены на этот же товар.

Эластичность ε_{ij} при $i \neq j$ называется перекрестной, и она показывает влияние изменения цены одного товара на спрос другого.

Классификация товаров на основе прямой и перекрестной эластичности сводится к следующему:

1) если $|\varepsilon_{ij}| < 1$, то i-й товар называется *малоэластичным*;
2) если $|\varepsilon_{ij}| \approx 1$, то i-й товар называется *среднеэластичным*;
3) если $|\varepsilon_{ij}| > 1$, то i-й товар называется *высокоэластичным*;

4) если увеличение цены на j-й товар приводит к увеличению спроса на i-й товар и наоборот, то эти товары называются *взаимозаменяемыми*.

2.2. Произведите классификацию товаров по следующей таблице эластичностей:

Товар	Первый	Второй	Третий
Первый	$\frac{\delta - 610}{100}$	$\frac{550{,}5 - \delta}{100}$	$\frac{570{,}5 - \delta}{100}$
Второй	$\frac{550{,}5 - \delta}{120}$	$\frac{\delta - 640}{100}$	$\frac{520{,}5 - \delta}{100}$
Третий	$\frac{570{,}5 - \delta}{120}$	$\frac{520{,}5 - \delta}{90}$	$\frac{\delta - 680}{100}$

Решение:

Число δ=502. Тогда таблица эластичностей принимает вид:

Товар	Первый	Второй	Третий
Первый	-1,08	0,485	0,685
Второй	0,404	-1,38	0,185
Третий	0,571	0,205	-1,78

Так как $|\varepsilon_{11}| = 1{,}08 > 1$, то первый товар высокоэластичный;

так как $|\varepsilon_{22}| = 1{,}38 < 1$, то второй товар высокоэластичный;

так как $|\varepsilon_{33}| = 1{,}78 > 1$, то третий товар высокоэластичный.

Поскольку $\varepsilon_{12} = 0{,}485 > 0$ и $\varepsilon_{21} = 0{,}404 > 0$, то 1-й и 2-й товары взаимозаменяемые.

Поскольку $\varepsilon_{13} = 0{,}685 > 0$ и $\varepsilon_{31} = 0{,}571 > 0$, то 1-й и 3-й товары взаимозаменяемые.

Поскольку $\varepsilon_{23} = 0{,}185 > 0$ и $\varepsilon_{32} = 0{,}205 > 0$, то 2-й и 3-й товары взаимозаменяемые.

Задание 3

Межотраслевой баланс

3.1. Дайте определение коэффициентов прямых затрат. Где они могут быть использованы?

Пусть народное хозяйство представлено n отраслями сферы материального производства. Каждая из отраслей производит один агрегированный продукт. Валовой выпуск этих продуктов отраслями обозначим x_1, x_2, …, x_n. Вся продукция x_i отрасли i, i=1,2,…,n, делится на промежуточную Z_i и конечную y_i. Промежуточную продукцию потребляют в процессе производства сами отрасли. Конечная продукция выходит из сферы материального производства и предназначается для непроизводственного потребления.

На основе отчетных данных о деятельности отраслей за определенный период можно составить межотраслевой баланс. Обозначим x_{ij} – объем продукта i-й отрасли, используемый за отчетный период j-й отраслью. Если представить, как распределяется валовая продукция каждой отрасли по другим отраслям и в сфере потребления, то получится система уравнений.

$$\begin{cases} x_1 = Z_1 + y_1 = x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} + y_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_i = Z_i + y_i = x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} + y_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = Z_n + y_n = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nn} + y_n \end{cases} \qquad (1)$$

Преобразуем систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{x_{11}}{x_1}\cdot x_1 + \dfrac{x_{12}}{x_2}\cdot x_2 + \ldots + \dfrac{x_{1n}}{x_n}\cdot x_n + y_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_i = \dfrac{x_{i1}}{x_1}\cdot x_1 + \dfrac{x_{i2}}{x_2}\cdot x_2 + \ldots + \dfrac{x_{in}}{x_n}\cdot x_n + y_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \dfrac{x_{n1}}{x_1}\cdot x_1 + \dfrac{x_{n2}}{x_2}\cdot x_2 + \ldots + \dfrac{x_{nn}}{x_n}\cdot x_n + y_n \end{cases} \qquad (2)$$

Отношение $\dfrac{x_{ij}}{x_j} = a_{ij}$ называется *коэффициентом прямых затрат* и содержательно означает объем продукции i-й отрасли, который требуется передать j-й отрасли, чтобы последняя произвела единицу своей валовой продукции.

Учитывая это, система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + y_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_{ni}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + y_n \end{cases} \qquad (3)$$

Модель межотраслевого баланса может использоваться в планировании деятельности отраслей материального производства. Если технологии производства продуктов не меняются, то коэффициенты прямых затрат остаются неизменными.

Используя систему уравнений межотраслевого баланса при известном плановом значении конечной продукции **y** отраслей, можно вычислить плановое производство валовой продукции **x** этих отраслей.

3.2. За отчетный период имел место следующий баланс продукции:

$$\mathbf{x_1=x_{11}+x_{12}+y_1}$$

$$\mathbf{x_2=x_{21}+x_{22}+y_2}$$

$$\mathbf{x_{11}=800-\delta \qquad x_{12}=700-\delta}$$

$$\mathbf{x_{21}=750-\delta \qquad x_{22}=850-\delta}$$

$$\mathbf{y_1=300 \qquad y_2=220}$$

а) Вычислите коэффициенты прямых затрат

б) Вычислите плановый объем валовой продукции отраслей, если план выпуска конечной продукции $y^П_1$=350; $y^П_2$=250 при условии неизменности технологии производства.

Решение:

При δ=502 x_{11} = 800-502 = 298 x_{12} = 700-502 = 198

x_{21} = 750-502 = 248 x_{22} = 850-502 = 348

x_1 = 298+198+300 = 796

x_2 = 248+348+220 = 816

а) Вычислим коэффициенты прямых затрат.

$$a_{11} = \frac{x_{11}}{x_1} = \frac{298}{796} = 0{,}374 \qquad a_{12} = \frac{x_{12}}{x_2} = \frac{198}{816} = 0{,}243$$

$$a_{21} = \frac{x_{21}}{x_1} = \frac{248}{796} = 0{,}312 \qquad a_{22} = \frac{x_{22}}{x_2} = \frac{348}{816} = 0{,}426$$

б) Вычислим плановый объем валовой продукции отраслей.

$$\begin{cases} (1-0{,}374)\cdot x_1 - 0{,}243\cdot x_2 = 350 \\ -0{,}312\cdot x_1 + (1-0{,}426)\cdot x_2 = 250 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0{,}626\cdot x_1 - 0{,}243\cdot x_2 = 350 \\ -0{,}312\cdot x_1 + 0{,}574\cdot x_2 = 250 \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения x_2:

$$0{,}626x_1=350+0{,}243x_2$$

$$x_1 = \frac{350}{0{,}626} + \frac{0{,}243}{0{,}626}x_2$$

x_1 = 559,11 + 0,39x_2 – и подставим во второе уравнение:

$$-0,312(559,11 + 0,39x_2) + 0,574x_2 = 250$$

$$-174,44 - 0,122x_2 + 0,574x_2 = 250$$

$$0,452x_2 = 424,44$$

$$x_2 = \frac{424,44}{0,452} = 939,03$$

$$x_1 = 559,11 + 0,39 \cdot 939,03 = 925,33$$

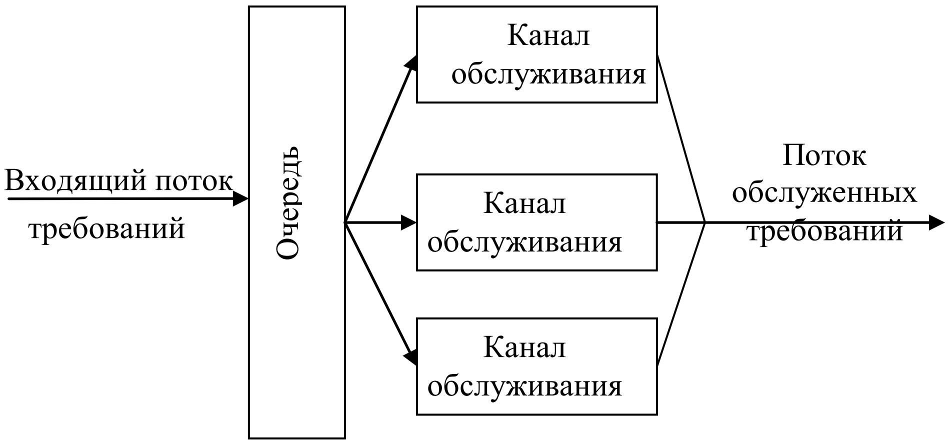
Таким образом, $x^П_1$ = 925,33 – плановый объем валовой продукции первой отрасли, $x^П_2$ = 939,03 – плановый объем валовой продукции второй отрасли.

Задание 4

Системы массового обслуживания

4.1. Дайте описание входящего потока требований и каналов обслуживания. Какие экономические показатели характеризуют работу СМО?

К системам массового обслуживания относятся магазины, рестораны, автозаправочные станции, аэродромы, автоматизированные телефонные станции и многие другие объекты. Общую схему СМО можно представить в следующем виде:



Для входящего потока требований предположим, что интервалы между поступлениями соседних требований есть случайная величина X с показательным законом распределения, т.е. интегральная функция F(t) имеет вид:

$$F(t)=1-\ell^{-\lambda t},\ t \geq 0.$$

Число λ (треб./ед. времени) называется интенсивностью входящего потока, и она показывает, сколько в среднем требований поступает в единицу времени.

Будем считать, что очередь не ограничена и требования обслуживаются в порядке поступления.

Для обслуживания примем предположения, что все n каналов одинаковы и для каждого из них время обслуживания одного требования есть случайная величина Y, распределенная по показательному закону, т.е. ее интегральная функция имеет вид:

$$F(t)=1-\ell^{-\mu t},\ t\geq 0.$$

Число μ (треб./ед. времени) называется интенсивностью обслуживания, и она показывает, сколько в среднем требований обслуживается одним каналом в единицу времени.

Обозначим $\alpha = \dfrac{\lambda}{\mu}$ (α – параметр загрузки СМО) и предположим, что выполняется условие стационарности

$$\alpha < n \text{ или } \lambda < \mu \cdot n. \qquad (1)$$

Условие (1) означает, что интенсивность входящего потока меньше, чем суммарная интенсивность обслуживания.

При сформулированных предположениях можно рассчитать некоторые экономические показатели работы СМО, такие, например, как $P_к$ – доля времени работы К – каналов, К = 0,1,…,n; L – средняя длина очереди и другие. Формулы для вычисления $p_0,\ldots,p_n$, L в общем случае довольно громоздки, поэтому приведем их для случая n = 2:

$$p_0 = \frac{2-\alpha}{2+\alpha}; \qquad p_1 = \frac{(2-\alpha)\alpha}{2+\alpha}; \qquad p_2 = \frac{\alpha^2}{2+\alpha}; \qquad L = \frac{\alpha^3}{4-\alpha^2}.$$

4.2. В магазине самообслуживания работают две кассы с интенсивностью μ = (δ+300)/100 (треб./мин.). Входящий поток требований имеет интенсивность λ = (δ+400)/100 (треб./мин.). Рассчитайте долю времени простоя касс и среднюю длину очереди. Если интенсивность входящего потока станет равной λ = (700-δ)/10 (треб./мин.), то будет ли выполнено условие стационарности? Если будет, то во сколько раз увеличится средняя длина очереди?

Решение:

Т.к. δ = 502, то μ = 8,02 (треб./мин.), а первоначальное значение λ равно 9,02 (треб./мин.).

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{9{,}02}{8{,}02} = 1{,}125 \quad p_0 = \frac{2-\alpha}{2+\alpha} = \frac{2-1{,}125}{2+1{,}125} = 0{,}28 \quad (p_0 = 28\%)$$

$$L_1 = \frac{\alpha^3}{4-\alpha^2} = \frac{(1{,}125)^3}{4-(1{,}125)^2} = 0{,}521 \text{ (треб.)}$$

Если интенсивность λ станет равной (700-502)/10 = 19,8 (треб./мин.), то в силу неравенства 19,8 > 16,04 условие стационарности СМО ($\lambda < \mu \cdot n$) не выполнено.

Итак, при интенсивности обслуживания μ=8,02 (треб./мин.) и интенсивности входа λ=9,02 (треб./мин.) доля времени простоя касс составляет 28% времени, а средняя длина очереди равна 0,521 (треб.). Если же интенсивность входа станет равной 19,8 (треб./мин.), то условие стационарности СМО будет не выполнено.

Задание 5
Модели управления запасами

5.1. Сформулируйте задачу оптимального управления запасами.

Задача оптимального управления запасами будет формулироваться следующим образом: определить объем q заказываемой партии товара, при котором достигается минимум затрат на складские операции в единицу времени в предположении, что темп поступления заказанного товара превышает норму спроса на него.

5.2. Дайте экономическую интерпретацию предельной арендной плате.

Экономически λ интерпретируется как предельная (максимальная) арендная плата за использование дополнительных складских емкостей. Если фактическая арендная плата α $\left(\frac{\text{руб.}}{\text{кг} \cdot \text{сут}}\right)$ меньше либо равна предельной λ $\left(\frac{\text{руб.}}{\text{кг} \cdot \text{сут}}\right)$, т.е. $\alpha \le \lambda$, то аренда выгодна и объем заказываемой партии вычисляется по формуле $q = \sqrt{\frac{2rC_З}{C_x(1 - r/k)}}$. Если же $\alpha > \lambda$, то аренда невыгодна и тогда объем заказа надо уменьшать, и он рассчитывается в этом случае по формуле $q = \frac{Qu}{1 - r/k}$, где

$C_х$ – затраты на хранение единицы товара в единицу времени;

$C_з$ – затраты на заказ партии товара;

r – норма спроса;

k – темп поступления заказанного товара;

Q – емкость склада;

u – количество товара, размещаемого в единице емкости склада.

5.3. Сделайте вывод о целесообразности аренды дополнительных складских емкостей или о необходимости сокращения объема заказываемой партии товара с учетом имеющихся складских емкостей при сравнении фактической α $\left(\frac{\text{руб.}}{\text{кг} \cdot \text{сут}}\right)$ и предельной λ $\left(\frac{\text{руб.}}{\text{кг} \cdot \text{сут}}\right)$ арендной платы за хранение единицы товара в единицу времени.

$$\alpha = \frac{700 - \delta}{4000} \qquad \lambda = \frac{\delta - 400}{4000}$$

Решение:

При δ=502, $\alpha = 0{,}0495 \left(\frac{\text{руб.}}{\text{кг} \cdot \text{сут}}\right)$ $\lambda = 0{,}0255 \left(\frac{\text{руб.}}{\text{кг} \cdot \text{сут}}\right)$

$$\boldsymbol{\alpha > \lambda}$$

Вывод: фактическая арендная плата больше предельной арендной платы. Следовательно, аренда дополнительных складских емкостей невыгодна.

Задание 6

Модели теории игр

6.1. Объясните смысл элементов платежной таблицы и способы выбора стратегий с позиций крайнего пессимизма, крайнего оптимизма и оптимизма-пессимизма.

Рассмотрим проблему уценки неходового товара с целью получения возможно большей выручки от реализации. Предположим, что эластичность спроса в зависимости от цены неизвестна, т.е. неясно, как отреагирует рынок на то или иное снижение цены.

Иными словами, нужно принять решение в условиях неопределенности. В таком случае можно использовать методы теории игр. Обозначим $A_1, A_2, \ldots, A_m$ – стратегии снижения цены на товар на $\alpha_1\%$, $\alpha_2\%, \ldots, \alpha_m\%$ соответственно. Возьмем достаточно подробный перечень возможных значений эластичности ε_1, $\varepsilon_2, \ldots$, ε_n. Если выбрать определенную стратегию A_i и знать эластичность товара ε_j, то, используя еще некоторые величины, можно подсчитать выручку от реализации товара a_{ij}. Проделав это для всех A_i и для всех ε_j, получим платежную таблицу:

Стратегия снижения цены	ε_1	ε_2	…	ε_j	…	ε_n
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1j}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2j}	…	a_{2n}
⋮						
A_i	a_{i1}	a_{i2}	…	a_{ij}	…	a_{in}
⋮						
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mj}	…	a_{mn}

В таблице представлен подробный перечень различных ситуаций. Для принятия решения можно использовать следующие способы.

Подход с позиции крайнего пессимизма

Он заключается в том, чтобы считать, что при выборе любой стратегии A_i эластичность товара будет самая неблагоприятная и выручка α_i будет минимально возможной, т.е.

$$\alpha_i = \min (\alpha_{i1}, \alpha_{i2},\ldots, \alpha_{im}).$$

Вычислив все величины α_i $(\alpha_{i1}, \alpha_{i2},\ldots, \alpha_{im})$, нужно взять наибольшую из них α:

$$\alpha = \max(\alpha_i).$$

Та стратегия, которая соответствует числу α, и есть стратегия крайнего пессимизма. Иначе говоря, такая стратегия есть наилучший выбор из плохих ситуаций, и эта стратегия гарантирует, что, как бы не сложилась действительная ситуация, выручка будет не меньше, чем α.

Подход с позиции крайнего оптимизма

Он заключается в том, чтобы считать при выборе любой стратегии A_i эластичность будет наиболее благоприятной и выручка β_i наибольшая, т.е.

$$\beta_i= \max(\beta_{i1}, \beta_{i2},\ldots, \beta_{im}).$$

Вычислив все β_i, нужно взять наибольшую из них:

$$\beta=\max(\beta_i).$$

Та стратегия, которая соответствует величине β, и есть искомая.

Подход с позиции пессимизма- оптимизма

Рассмотрим величину H:

$$H = \max[(1-\lambda)\,\alpha_i+\lambda\,\beta_i],$$

где λ – числовой параметр, $0\leq \lambda \leq 1$.

Предполагается выбирать стратегию, соответствующую величину H.

При $\lambda = 0$: $H = \max \alpha_i = \alpha$, и этот подход превращается в подход с позиции крайнего пессимизма.

При $\lambda=1$: $H = \max \beta_i = \beta$, и этот подход превращается в подход с позиции крайнего оптимизма.

Вообще, величина H при изменении λ от 0 до 1 непрерывно изменяется от α до β, и выбор некоторого промежуточного λ соответствует сочетанию пессимизма и оптимизма при выборе стратегии. Возьмем, например, $\lambda=0{,}5$ и вычислим

$$\gamma_i=\frac{1}{2}\alpha_i+\frac{1}{2}\beta_i,$$

а затем выберем наибольшее из них

$$\gamma=\max(\gamma_i).$$

Стратегию, на которой достигается величина γ, будем называть соответствующей подходу с позиции пессимизма-оптимизма.

2. Выберите стратегии позиций крайнего пессимизма, крайнего оптимизма и оптимизма-пессимизма для следующей платежной таблицы. Укажите соответствующие выигрыши.

ε / A	ε_1	ε_2	ε_3
A_1	δ-490	δ-480	620-δ
A_2	610-δ	620-δ	630-δ
A_3	$\lvert 550-\delta \rvert+10$	$\lvert 560-\delta \rvert+10$	640-δ

Решение:

Для числа $\delta=551$ таблица приобретает вид:

ε / A	ε_1	ε_2	ε_3
A_1	12	22	118
A_2	108	118	128
A_3	58	68	138

Выберем по каждой строке таблицы минимальное из чисел α_i, максимальное β_i, а затем вычислим их полусумму γ_i.

ε / A	ε_1	ε_2	ε_3	α_i	β_i	γ_i
A_1	12	22	118	12	118	65
A_2	108	118	128	108	128	118
A_3	58	68	138	58	138	98

Получим:

$\alpha = \max(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \max (12, 108, 58) = 108$;

$\beta = \max(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \max(118, 128, 138) = 138$;

$\gamma = \max(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \max(65, 118, 98) = 118$.

Так как $\alpha = 108$ и это число находится в строке, соответствующей A_2, то A_2 – стратегия крайнего пессимизма, ожидаемый выигрыш равен 108 ед. Так как $\beta = 138$ и это число находится в строке, соответствующей A_3, то A_3 – стратегия крайнего оптимизма, ожидаемый выигрыш равен 138 ед. Так как $\gamma = 118$ и это число находится в строке, соответствующей A_2, то A_2 – стратегия оптимизма-пессимизма, ожидаемый выигрыш равен 118 ед.

Задание 7

Эконометрические модели. Выборочный метод

7.1. Дайте понятия генеральной и выборочной совокупностей.

Генеральной совокупностью называется множество однородных объектов, изучаемых относительно некоторого количественного признака или группы признаков. Количество объектов в этой совокупности называют объемом генеральной совокупности, при этом предполагается, что признак X имеет значение $x_1, x_2, \ldots x_m$ для каждого из N элементов совокупности.

Зачастую изучение всей генеральной совокупности объектов относительно определенного признака по ряду причин обусловлено большими трудностями или вообще невозможно. Тогда изучение осуществляется на основе *выборочной совокупности*, которая формируется из генеральной отбором объектов случайным образом. Объем n выборочной совокупности существенно меньше объема N генеральной совокупности.

7.2. Определите соотношения между доверительными интервалами:

а) при фиксированных значениях среднеквадратического отклонения σ, надежности Р и различных значениях объема выборки

n_1=610-δ, n_2=δ-490;

б) при фиксированных значениях среднеквадратического отклонения σ, объема выборки n и различных значениях надежности

$$p_1 = \frac{800-\delta}{400}; \qquad p_2 = \frac{\delta-300}{400};$$

в) при фиксированных значениях надежности Р, объема выборки n и различных значениях среднеквадратического отклонения

$$\sigma_1 = \frac{700-\delta}{100}; \qquad \sigma_2 = \frac{\delta-400}{100}.$$

Решение:

а) при δ=502: n_1=610-502=108, n_2=502-490=12;

Объемы выборок находятся в соотношении $n_1 > n_2$. Тогда из формулы нахождения погрешности

$$\Delta = \frac{t_p\,(n)\sigma_b}{\sqrt{n}}\sqrt{1-\frac{n}{N}}$$

следует, что при возрастании объема выборки n значение Δ уменьшается и $\Delta_1 < \Delta_2$, т.е. доверительный интервал, соответствующий объему выборки

n_1=108, будет меньше доверительного интервала, соответствующего объему выборки n_2=12.

б) $p_1 = \frac{800-\delta}{400} = \frac{800-502}{400} = 0{,}745;$

$p_2 = \frac{\delta-300}{400} = \frac{502-300}{400} = 0{,}505;$

$$p_1 > p_2$$

Из формулы нахождения погрешности следует, что при возрастании надежности Р значение Δ увеличивается, так как увеличивается значение функции Стьюдента $t_p(n)$. Следовательно, $\Delta_1 > \Delta_2$, т.е. доверительный интервал, соответствующий надежности $P_1 = 0{,}745$, будет больше доверительного интервала, соответствующего надежности $P_2 = 0{,}505$.

в) $\sigma_1 = \frac{700-\delta}{100} = \frac{700-502}{100} = 1{,}98;$ $\sigma_2 = \frac{\delta-400}{100} = \frac{502-400}{100} = 1{,}02.$

$$\boldsymbol{\sigma_1 > \sigma_2}$$

Из формулы нахождения погрешности следует, что при возрастании среднеквадратического отклонения значение Δ увеличивается. Следовательно, $\Delta_1 > \Delta_2$, т.е. доверительный интервал, соответствующий среднеквадратическому отклонению $\sigma_1 = 1{,}98$, будет больше доверительного интервала, соответствующего среднеквадратическому отклонению $\sigma_2 = 1{,}02$.

Задание 8
Эконометрические модели. Корреляционные методы

8.1. Дайте понятия функциональной и корреляционной зависимостей.

Функциональная зависимость – это такая связь между результативными и факторными признаками, когда значение результативного признака-функции полностью определяется значениями факторных признаков. Если на результативный признак влияет один фактор X, то его называют функцией одного аргумента y(x), если факторных признаков много, например $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то получаем функцию многих переменных.

Общим для всех функциональных зависимостей является то, что каждому значению факторного признака x соответствует вполне определенное и единственное значение результативного признака y.

Связь между экономическими показателями обычно нельзя считать функциональной, и значения факторных признаков полностью не определяет значения результативного признака. Для таких сложных случаев нефункциональной связи признаков в математике разработаны методы более общих зависимостей – корреляционных, для которых функциональная зависимость является лишь предельным частным случаем.

Корреляционная зависимость - это такая связь между признаками, когда определенным значениям факторных признаков соответствует множество случайных значений результативного признака.

8.2. Дайте определение коэффициента корреляции. Каковы его смысл и свойства?

Особое место в анализе взаимосвязей между результативным и факторными признаками занимает выявление тесноты связи между ними, которая характеризуется при линейной корреляционной связи *коэффициентом корреляции r*. Он рассчитывается по формуле $r = b \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$, где σ_x, σ_y - среднеквадратические отклонения факторного x и результативного y признаков.

Если r = 1, то все точки (x_i, y_i) расположены на прямой и связь между признаками y и x самая сильная – функциональная. Если r > 0, то связь называют прямой, т.е. с возрастанием значения факторного признака возрастает значение результативного. При r < 0 – связь обратная, т.е. с возрастанием значения факторного признака значение результативного убывает. Таким образом, знак определяет направление связи (прямая, обратная). При r = 0 признаки y и x называют некоррелированными. Степень тесноты связи, характеризуемой коэффициентом корреляции, отражена в таблице:

Величина (r)	0,1-0,3	0,3-0,5	0,5-0,7	0,7-0,9	0,9-0,99
Теснота связи	Слабая	Умеренная	Заметная	Высокая	Весьма высокая

8.3. Оцените тесноту связи и направление связи между признаками x и y, если известны: b – коэффициент регрессии, σ_x, σ_y - среднеквадратические отклонения признаков x и y.

Решение:

Направление и теснота связи между признаками x и y оцениваются на основе коэффициента корреляции, который рассчитывается по формуле:

$$r = b \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

В данном случае при δ = 502

$$b = (-1)^{502} \frac{650 - 502}{300} = 0{,}49;$$

$$\sigma_x = \frac{700 - 502}{100} = 1{,}98;$$

$$\sigma_y = \frac{502 - 400}{100} = 1{,}02;$$

$$r = 0{,}49 \cdot \frac{1{,}98}{1{,}02} = 0{,}951.$$

Коэффициент корреляции показывает, что связь между признаками x и y сильная и прямая, то есть с возрастанием значения факторного признака x увеличивается значение результативного признака y.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Исследование операций в экономике: учебное пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин и др. – М.: Банки и биржи: ЮНИТИ, 1997.

2. Экономико-математические методы: программа, методические указания и задания контрольной и самостоятельной работы студентов / Н.В. Шаланов. – Новосибирск: СибУПК, 2009. – 44с.