

$$L_1 := 6 \text{ m} \quad L_2 := 4 \text{ m} \quad h := 4 \text{ m} \quad m_1 := 4 \quad m_2 := 3 \quad F := 30$$

$$E := 2 \cdot 10^8 \frac{\text{kH}}{\text{m}^2} \quad J := 7000 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4 \quad EJ = 14000 \text{ kH} \cdot \text{m}^2$$

1 Число степеней свободы = 2, т.к. существует 2 возможных направления колебаний грузов m_1 и m_2 .

2 Степень кинематической неопределенности = 1 (1 промежуточный узел)

3 Основную систему метода перемещений образуем введением плавающей заделки

Строим эп Mz_1 от едичного перемещения, строим эп $M1_0$ и $M2_0$ от едичных сил в направлении возможных колебаний грузов, M_{p0} от силы F используя таблицы приложений. (в основной системе)

каноническое ур-е метода перемещений

$$r_{11} \cdot Z_1 + R_1 = 0 \quad Z_1 = \frac{-R_1}{r_{11}}$$

Вырезаем узла 3 получая коэффициент

$$r_{11} := \left(\frac{3}{6} + \frac{3}{4} + \frac{4}{4} \right) \cdot EJ \quad r_{11} = 2.25 \cdot EJ$$

$$M_{o1_1} := \frac{2.5 \cdot 1 \cdot 6}{16} \quad M_{o1_1} = 0.9375$$

$$M_{o1_2} := \frac{-3 \cdot 1 \cdot 6}{16} \quad M_{o1_2} = -1.125$$

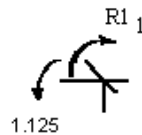
$$M_{o2_3} := \frac{3 \cdot 1 \cdot 4}{16} \quad M_{o2_3} = 0.75$$

$$M_{o2_4} := \frac{-2.5 \cdot 4}{16} \quad M_{o2_4} = -0.625$$

$$M_{p0_5} := \frac{30 \cdot 4}{8} \quad M_{p0_5} = 15 \quad M_{p0_6} := \frac{-30 \cdot 4}{8}$$

$$M_{p0_7} := \frac{30 \cdot 4}{8} \quad M_{p0_7} = 15$$

Вырезаем узлов определяю свободные члены канонического уравнения, решаю уравнение и строю окончательные эпюры M_1, M_2, M_p .



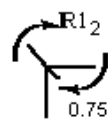
$$R_{1_1} := 1.125$$

$$Z_{1_1} := \frac{-R_{1_1}}{r_{11}}$$

$$Z_{1_1} = -0.5$$

Окончательная эпюра

$$M_1 := M_{1_0} + M_z \cdot Z_{1_1}$$

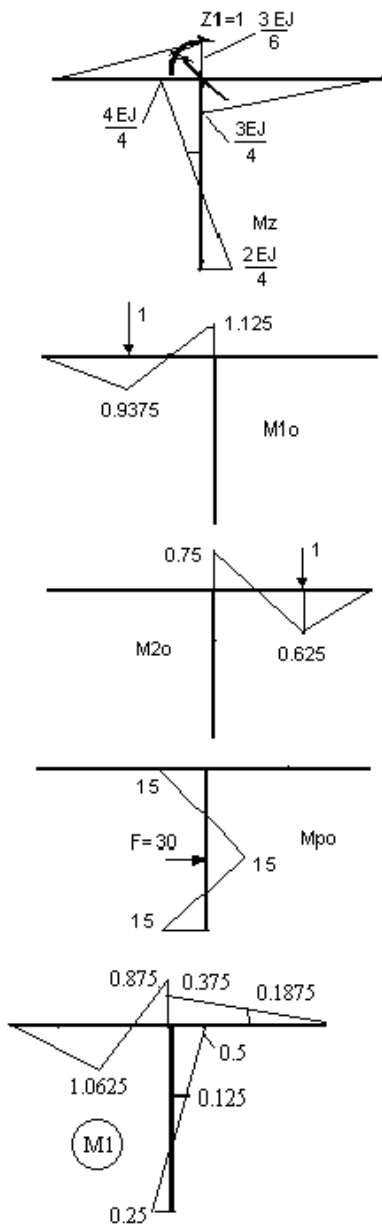


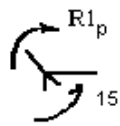
$$R_{1_2} := -0.75$$

$$Z_{1_2} := \frac{-R_{1_2}}{r_{11}}$$

$$Z_{1_2} = 0.3333$$

$$M_2 := M_{2_0} + M_z \cdot Z_{1_2}$$

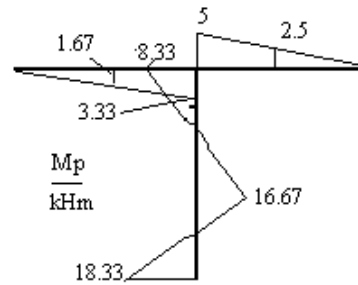
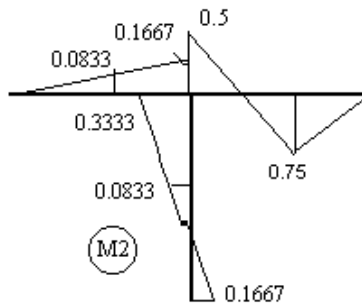




$$R1_p := 15$$

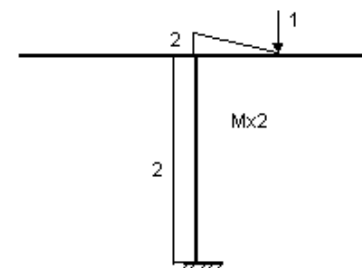
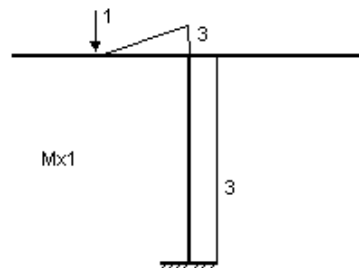
$$Z1_p := \frac{-R1_p}{r_{11}} \quad Z1_p = -6.6667$$

$$M_p := M_{p0} + M_z \cdot Z1_p$$



Образует основную систему метода сил отбросив все опоры кроме заделки и построим эпюры моментов от единичных сил в направлении колебаний грузов m_1 и m_2

Перемножением единичных эпюр M_{x1} и M_{x2} на эпюры M_1 , M_2 , M_p находим коэффициенты



$$\delta_{11} = \frac{M_{x1} \cdot M_1}{EJ_i}$$

$$\delta_{11} := \frac{1}{EJ} \left[\frac{3^2}{2} \cdot \left(\frac{0.875}{1.5} - \frac{1.0625}{3} \right) + 3 \cdot 4 \cdot 0.125 \right]$$

$$\delta_{11} = 1.808 \cdot 10^{-4} \frac{m}{kH}$$

$$\delta_{22} = \frac{M_{x2} \cdot M_2}{EJ_i}$$

$$\delta_{22} := \frac{1}{EJ} \left[\frac{2^2}{2} \cdot \left(\frac{0.5}{1.5} - \frac{0.75}{3} \right) + 2 \cdot 4 \cdot 0.0833 \right]$$

$$\delta_{22} = 5.9505 \cdot 10^{-5} \frac{m}{kH}$$

$$\delta_{12} = \frac{M_{x1} \cdot M_2}{EJ_i}$$

$$\delta_{12} := \frac{1}{EJ} \left[\frac{3^2}{2} \cdot \left(\frac{0.166667}{1.5} + \frac{0.08333333}{3} \right) - 3 \cdot 4 \cdot 0.0833333 \right]$$

$$\delta_{12} = -2.6786 \cdot 10^{-5} \frac{m}{kH}$$

$$\delta_{21} = \frac{M_{x2} \cdot M_1}{EJ_i}$$

$$\delta_{21} := \frac{1}{EJ} \left[\frac{2^2}{2} \cdot \left(\frac{0.375}{1.5} + \frac{0.1875}{3} \right) - 2 \cdot 4 \cdot 0.125 \right]$$

$$\delta_{21} = -2.6786 \cdot 10^{-5} \frac{m}{kH}$$

Получил $\delta_{12} = \delta_{21}$

$$\Delta_{1p} = \frac{M_{x1} \cdot M_p}{EJ_i}$$

$$\Delta_{1p} := \frac{1}{EJ} \left[\frac{-3^2}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot 3.333 + 2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{16.667 \cdot 2 - 8.333 - 18.333}{2} \right) \right]$$

$$\Delta_{1p} = 5.98036 \cdot 10^{-5} m$$

$$\Delta_{2p} = \frac{M_{x2} \cdot M_p}{EJ_i}$$

$$\Delta_{2p} := \frac{1}{EJ} \left[\frac{-2^2}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot 5 + 2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{-16.667 \cdot 2 + 8.333 + 18.333}{2} \right) \right]$$

$$\Delta_{2p} = -1.5478 \cdot 10^{-3} m$$

Частоты свободных колебаний получим из ур-я

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} \cdot m_1 - \lambda & \delta_{12} \cdot m_2 \\ \delta_{21} \cdot m_2 & \delta_{22} \cdot m_1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\delta_{11} \cdot m_1 - \lambda) \cdot (\delta_{22} \cdot m_2 - \lambda) - \delta_{12}^2 \cdot m_1 \cdot m_2 = 0$$

Подставляя числовые значения и раскрывая скобки получим

$$(7.2321 \cdot 10^{-4} - \lambda) \cdot (1.78514 \cdot 10^{-4} - \lambda) - 8.6096 \cdot 10^{-9} = 0$$

$$1.20494 \cdot 10^{-7} - 0.000901729 \cdot \lambda + \lambda^2 = 0$$

Находим корни

$$\lambda_1 = 7.3859 \cdot 10^{-4} \quad \lambda_2 = 1.6314 \cdot 10^{-4}$$

Собственные частоты колебаний

$$\omega_1 := \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}} \quad \omega_1 = 36.8 \quad \text{с}^{-1} \quad \omega_2 := \sqrt{\frac{1}{\lambda_2}} \quad \omega_2 = 78.3 \quad \text{с}^{-1}$$

Находим собственные формы, соответствующие собственным частотам колебаний

$$V_{1,1} := 1 \quad V_{2,1} := \frac{\lambda_1 - \delta_{11} \cdot m_1}{\delta_{12} \cdot m_2} \quad V_{2,1} = -0.1913$$

$$V_{1,2} := 1 \quad V_{2,2} := \frac{\lambda_2 - \delta_{11} \cdot m_1}{\delta_{12} \cdot m_2} \quad V_{2,2} = 6.96981$$

Проверка ортогональности $m_1 \cdot V_{1,1} \cdot V_{1,2} + m_2 \cdot V_{2,1} \cdot V_{2,2} = 0$

Приняли частоту возмущающей силы $\Theta := 0.9 \cdot \omega_1 \quad \Theta = 33.12 \quad \text{с}^{-1}$

Амплитуду инерционных сил определим из системы уравнений

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot I_1 + \delta_{12} \cdot I_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21} \cdot I_1 + \delta_{22} \cdot I_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{cases} \quad \text{где} \quad \delta_1 := \delta_{11} - \frac{1}{m_1 \cdot \Theta^2} \quad \delta_1 = -4.71553 \cdot 10^{-5} \quad \Delta_{1p} = 5.9804 \cdot 10^{-5}$$

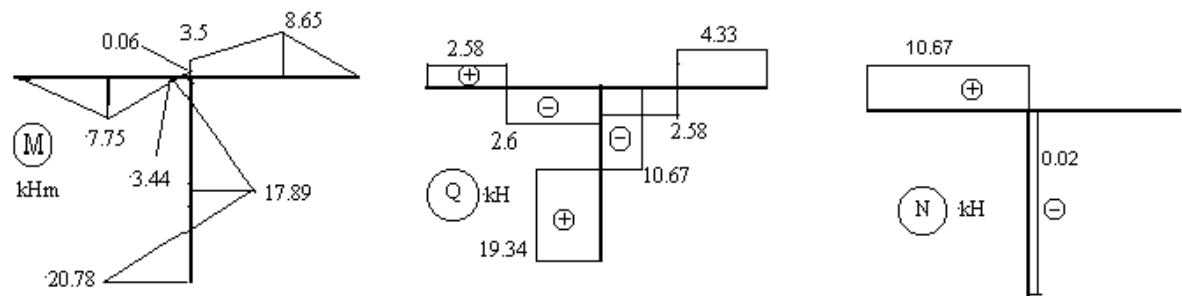
$$\delta_2 := \delta_{22} - \frac{1}{m_2 \cdot \Theta^2} \quad \delta_2 = -2.4444 \cdot 10^{-4} \quad \Delta_{2p} = -1.5478 \cdot 10^{-3}$$

$$-4.71553 \cdot 10^{-5} \cdot I_1 - 2.6786 \cdot 10^{-5} \cdot I_2 + 5.9804 \cdot 10^{-5} = 0$$

$$-2.6786 \cdot 10^{-5} \cdot I_1 - 2.4444 \cdot 10^{-4} \cdot I_2 - 1.5478 \cdot 10^{-3} = 0$$

Решая систему получим $I_1 = 5.19 \quad \text{kH}$
 $I_2 = -6.9 \quad \text{kH}$

Строим динамическую эпюру моментов, определяя ее ординаты по формуле $M := M_1 \cdot I_1 + M_2 \cdot I_2 + M_p$



используя эпюру M построим эпюру Q определяя ее ординаты по формуле

$$Q = \frac{M_{\text{прав}} - M_{\text{лев}}}{L}$$

$$Q_{A,1} := \frac{7.75}{3}$$

$$Q_{A,1} = 2.58 \quad \text{kH}$$

$$Q_{1,2} := \frac{-7.75 - 0.06}{3}$$

$$Q_{1,2} = -2.6 \quad \text{kH}$$

$$Q_{3,4} := \frac{3.5 - 8.65}{2}$$

$$Q_{3,4} = -2.58 \quad \text{kH}$$

$$Q_{4,C} := \frac{8.65}{2}$$

$$Q_{4,C} = 4.33 \quad \text{kH}$$

$$Q_{5,6} := \frac{-17.89 - 3.44}{2}$$

$$Q_{5,6} = -10.67 \quad \text{kH}$$

$$Q_{6,7} := \frac{20.78 + 17.89}{2}$$

$$Q_{6,7} = 19.34 \quad \text{kH}$$

Строим эпюру продольных сил определяя их значения из равновесия узлов

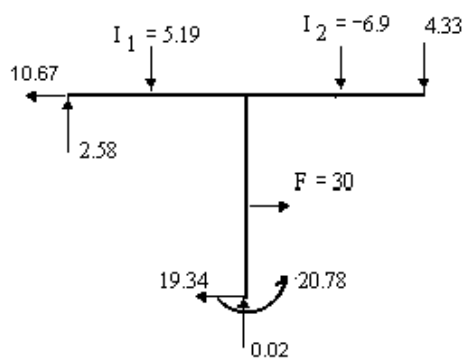
$$N_{3,C} := 0$$

$$N_{A,2} := 10.67$$

$$N_{5,7} := -2.6 + 2.58$$

$$N_{5,7} = -0.02 \quad \text{kH}$$

Определив из эпюр реакции опор составим 3 ур-я равновесия для полученной системы сил (статическая проверка)



$$\Sigma F_x = -19.33 + 30 - 10.67 \rightarrow 0$$

$$\Sigma F_y = 2.58 + 0.02 - 5.19 + 6.9 - 4.33 = 0$$

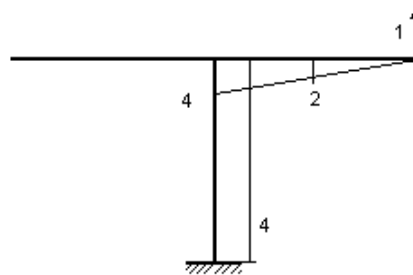
$$\Sigma M_3 =$$

$$20.78 - 2.58 \cdot 6 + 5.19 \cdot 3 + 30 \cdot 2 - 19.34 \cdot 4 + 6.9 \cdot 2 - 4.33 \cdot 4 = 0$$

Равновесие выполняется в пределах погрешности вычислений

Кинематическая проверка : Образует основную систему метода сил и построим эпюру M_1 от единичной силы в направлении X_3

перемножим эп M_1 и M по методу Верещагина.



$$\Delta_1 := \frac{1}{EJ} \left[-\frac{2^2 \cdot 8.65}{3} - \frac{2}{6} \cdot (8.65 \cdot 2 + 6 \cdot (8.65 + 3.5) + 3.5 \cdot 4) + 4 \cdot 2 \cdot \frac{17.89 \cdot 2 - 3.44 - 20.78}{2} \right] = \frac{143.12 - 143.147}{EJ} = -0.027 \cdot \frac{1}{EJ}$$

$$\text{Погрешность вычислений} \quad \left| \frac{0.027}{143.12} \right| \cdot 100 = 0.02 \quad \%$$